كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية رياضيات الفصل الأول	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	للعام الدراسي 2014 – 2015	الدرجة : (100)

السؤال الأول (40):

1) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\acute{y} - x y^2 + (2x - 1)y = x - 1 \qquad , \qquad y_1 = 1$$

2) جد الحل لمسألة كوشي التالية :

$$x\acute{y} = y + x \sin\frac{y}{x} \qquad , \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

السؤال الثاني (20) :

جد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية التالية ثم جد حلها العام :

$$\left(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

السؤال الثالث (20) :

جد الحل العام وسيطيا للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\acute{y}\sin\acute{y} + \cos\acute{y} - x = 0$$

السؤال الرابع (20) :

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

1) $y\ddot{y} - \acute{y}^2 = 0$

2) $x\ddot{y} + \acute{y} = 2x$

حمص 2015/2/9م. مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق د. ميسون زين الدين

...البعث
...العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح مقرر المعادلات التفاضلية (١)
السنة الثانية رياضيات الفصل الدراسي
الأول لعام ٢٠١٤/٢٠١٥

مدرس المادة
د. [illegible]

جواب السؤال الأول (40):

1)

$y' - xy^2 + (2x-1)y = x-1$; $y_1 = 1$

هي معادلة ريكاتي نفرض:

$y' = -\frac{z'}{z^2} \Leftarrow y = y_1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$

نعوض في المعادلة نجد:

$-\frac{z'}{z^2} - x\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 + (2x-1)\left(1+\frac{1}{z}\right) = x-1$

$-\frac{z'}{z^2} - x\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right) + 2x - 1 + \frac{2x}{z} - \frac{1}{z} = x-1$

10 $-z' - xz^2 - 2xz - x + 2xz^2 - xz^2 + 2xz - z - xz^2 + z^2 = 0$

$-z' - z = x \Rightarrow \boxed{z' + z = -x}$ (*)

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى:

$z' + z = 0 \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = -\int dx$

$\ln\frac{z}{c} = -x \Rightarrow z = ce^{-x} \Rightarrow z' = c'e^{-x} - ce^{-x}$

وبالتعويض في (*) نجد:

$c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} = -x \Rightarrow c' = -xe^{x} \Rightarrow c = -(x-1)$ ...

10 $\Rightarrow z = -(x-1) + c_1 e^{-x}$

وبالعودة للمتحولات القديمة:

$y = 1 + \frac{1}{(1-x) + c_1 e^{-x}} = \frac{c_1 e^{-x} - x + 2}{ce^{-x} - x \ldots}$

; $y(1)$ ...

$xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$

$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

ج ٢) نفرض $\frac{y}{x}=z \Leftarrow y=xz \Leftarrow$ بالاشتقاق $y'=z+xz'$

$z+xz'=z+\sin z \Rightarrow xz'=\sin z \Rightarrow \int\frac{dz}{\sin z}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|\tan\frac{z}{2}|=\ln|x|+\ln c \Rightarrow \tan\frac{z}{2}=cx \Rightarrow$

$z=2\arctan cx \Rightarrow \frac{y}{x}=2\arctan cx \Rightarrow$ الحل العام $\boxed{y=2x\arctan cx}$

$\Rightarrow \{y(1)=\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=2\arctan c \Rightarrow c=\tan\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow$ الحل الخاص:

(10) $|y=2x\arctan x|$

جواب السؤال الثاني (20):

$$\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+x^2+y^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$ ، المعادلة غير تامة نوجد عامل التكامل:

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \boxed{\mu=e^x}$$

نضرب طرفي المعادلة فنحصل على المعادلة التامة:

(10) $e^x\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$ (*)

نوجد الحل العام بأخذ $x_0=y_0=0$ للمعادلة (*) بالصيغة:

$$F=\int_0^x P(x,y_0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy=C$$

$$=\int_0^x (0)\,dx+\int_0^y e^x(x^2+y^2)\,dy=e^x x^2\int_0^y dy+e^x\int_0^y y^2\,dy$$

(10) $\Rightarrow F=e^x x^2 y+e^x\frac{y^3}{3}=C$

جواب السؤال الثالث (20):

$$y'\sin y'+\cos y'-x=0$$

المعادلة محلولة بالنسبة لـ x نفرض $y'=p$:

$$x=p\sin p+\cos p$$

نستخدم العلاقة الأساسية $dy-p\,dx=0$ نجد:

$$dx=dp\sin p+p\cos p\,dp-\sin p\,dp=p\cos p\,dp$$

نعوض:

$$dy=p^2\cos p\,dp \Rightarrow$$

بالتكامل نجد :

$$y=\int p^2\cos p\,dp=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C$$

والحل العام وسيطياً هو

10 $$\begin{cases} x = p\sin p+\cos p \\ y=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C \end{cases}$$

جواب السؤال الرابع (٢٠ د)

1) $yy''-y'^2=0$

معادلة من الرتبة الثانية لا تحوي x نفرض . $y'=p \Leftarrow y''=p\dfrac{dp}{dy}$

نعوض نجد : $yp\dfrac{dp}{dy}=p^2 \rightarrow y\dfrac{dp}{dy}=p \rightarrow \int\dfrac{dp}{p}=\int\dfrac{dy}{y} \rightarrow$

$\ln p=\ln cy \rightarrow \boxed{p=cy} \rightarrow y'=cy \rightarrow \int\dfrac{dy}{y}=c\int dx \rightarrow$

10 $\ln\dfrac{y}{c_1}=cx \rightarrow \boxed{y=c_1e^{cx}}$ الحل العام

2) $xy''+y'=2x$

معادلة من الرتبة الثانية لا تحوي y نفرض : $y'=p \Leftarrow y''=p'$ نعوض :

$xp'+p=2x \rightarrow \boxed{p'+\dfrac{1}{x}p=2}$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يكتب طرفها على شكل تفاضل تام :

بالتكامل $d(xp)=d(x^2)$

$xp=x^2+c_1 \Rightarrow p=x+\dfrac{c_1}{x}=y' \rightarrow$

بالتكامل نجد :

10 $y=\dfrac{x^2}{2}+c_1\ln x+c_2$



جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

امتحانات مقرر معادلات تفاضلية (1)

لطلاب السنة الثانية الفصل الدراسي الأول لعام

2015/2014 م.

الاسم :

الدرجة :(100)

المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول (20درجة) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

ص 53 $x\acute{y} - y + y^2 - x^2 = 0$; $y_1 = ax, a > 0$

السؤال الثاني (20 درجة) :

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية :

ص 45 $\left(x + y\, e^{y/x} \right) dx - x\, e^{y/x}\, dy = 0$

المحققة للشروط : $y(1) = 0$

السؤال الثالث (20 درجة) :

جد احل العام وسيطيا للمعادلة التفاضلية التالية :

ص 216 $y = 3\,\acute{y}^4 + \frac{1}{\acute{y}}$

السؤال الرابع (20 درجة) :

جد الحل العام و الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية التالية :

264 $x(\acute{y}^2 + 1) = 2y\,\acute{y}$

السؤال الخامس (20 درجة) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الثانية :

ص 318 $y\,\acute{\acute{y}} + \acute{y}^2 = \acute{y}$

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية (١)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الدراسي الثاني لعام ٢٠١١/٢٠١٠ م

د. محمود زين الدين

إجابة السؤال الأول (٢٠):

$xy' - y + y^2 - x^2 = 0 \quad ; \quad y_1 = ax$

لنوجد قيمة a: $y_1' = a$ نعوض في المعادلة:

$ax - ax + a^2x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (a^2-1)x^2 = 0 \Rightarrow$

بما أن $x \neq 0$ $\Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1$ نأخذ $a = +1$ والا

$y_1 = x$ هو حل خاص للمعادلة لنوجد الحل العام من أجل ريكاتي نجري التحويل التالي:

$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$

نعوض في المعادلة نجد: $\left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 = 0$

$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 = 0$

$x - x\frac{z'}{z^2} - x - \frac{1}{z} + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - x^2 = 0$

$-xz' - z + 2xz + 1 = 0$

$-xz' - (1 - 2x)z + 1 = 0$

(10)

$$z' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)z = +\frac{1}{x} \quad (1)$$

$z' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} + 2\int dx \Rightarrow$

$\ln \frac{z}{c} = -\ln x + 2x \Rightarrow \boxed{z = c\,x^{-1}e^{+2x}} \quad (2)$

$z' = c'x^{-1}e^{+2x} + c\left(x^{-1}e^{+2x}\right)' = c'e^{-2x} - c\frac{e^{+2x}}{x^2} + 2c\,x^{-1}e^{-1+2x}$

نعوض في (1):

$c'x^{-1}e^{+2x} - c\frac{e^{+2x}}{x^2} + 2c\,x^{-1}e^{+2x} + c\frac{e^{+2x}}{x^2} - 2c\,x^{-1}e^{+2x} = \frac{1}{x}$

$c'e^{2x} = 1 \Rightarrow c' = e^{-2x} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c_1 \Rightarrow$

$z = -\frac{1}{2}x^{-1} + c_1x^{-1}e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2x}{c_1e^{2x} - 1} \Rightarrow$

$$y = x + \frac{2x}{c_1e^{2x} - 1}$$

(10)

السؤال الثاني (٢٠):

$$(x+ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0 \quad ; \quad y(1)=0$$

معادلة متجانسة نجري التحويل:

$\frac{y}{x}=z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$

نعوض في المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+ye^{y/x}}{xe^{y/x}} = \frac{1+ze^{z}}{e^{z}} = \frac{1}{e^{z}} + z = z + xz'$$

(١٠)

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{e^{z}} \Rightarrow e^{z}dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln x = e^{z} + c}$$

نعوض بالشرط نجد: الحل العام

$\ln x = e^{y/x} + c \Rightarrow$

$\ln 1 = e^{0} + c \Rightarrow 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$

والحل الخاص:

(١٠) $$\boxed{\ln x = e^{y/x} - 1}$$

إجابة السؤال الثالث (٢٠):

$y' = p$ نجد:

$$y = 3y'^{4} + \frac{1}{y'}$$

$$y = 3p^{4} + \frac{1}{p}$$

محلولة بالنسبة لـ y ونشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$y' = p = 12p^{3}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^{2}}\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

(١٠)

$$p = \left(12p^{3} - \frac{1}{p^{2}}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p^{3}}{12p^{5}-1} \Rightarrow$$

$$dx = \left(12p^{2} - \frac{1}{p^{3}}\right)dp$$

معادلة ذات متحولات منفصلة حلها العام:

$$x = 4p^{3} - \frac{1}{2p^{2}} + c$$

والحل العام وسيطياً للمعادلة المعطاة:

(١٠)

$$\begin{cases} x = 4p^{3} - \frac{1}{2p^{2}} + c \\ y = 3p^{4} + \frac{1}{p} \end{cases}$$

السؤال الرابع (٢٠) :

المعادلة محلولة بالنسبة لـ x نكتب :

نشتق بالنسبة لـ y نجد : $y' = p$ ،

$$x = \frac{2yy'}{y'^2+1} = \frac{2yp}{p^2+1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{(2p+2y\frac{dp}{dy})(1+p^2) - 4yp^2\frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^2}$$

$$\frac{(1+p^2)(1-p^2)}{p} = 2y(1-p^2)\frac{dp}{dy}$$

نختصر على $1-p^2 \neq 0$ نجد :

ذات متحولات منفصلة :

(10) $$\frac{1+p^2}{p} = 2y\frac{dp}{dy}$$

$$\int \frac{2p\,dp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln(1+p^2) = \ln y + \ln c \Rightarrow$$

$$1+p^2 = cy \Rightarrow p^2 = cy-1 \Rightarrow p = \sqrt{cy-1}$$

$$y' = \sqrt{cy-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{cy-1}} = dx$$

بالمكاملة نحصل على الحل العام :

$$\boxed{4cy = c^2x^2+4}$$

والحل الشاذ : إذا كان $1-p^2=0 \Leftarrow$

(10) $y = \pm x \Leftarrow p^2 = 1$

وهو يحقق المعادلة ولا يمكن استنتاجه من عبارة الحل العام :

إجابة السؤال الخامس (٢٠)

غير صريحة بـ x نعتبر y المتحول ونفرض :

$$yy'' + y'^2 = y'$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$$

نعوض في المعادلة نجد :

(10) $$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = p \Rightarrow p\left[y\frac{dp}{dy} + p - 1\right] = 0$$

إذا كان $p \neq 0$ نجد :

$$y\frac{dp}{dy} + p - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p-1} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow p = 1 + \frac{c_1}{y} = y' \Rightarrow$$

(10) $$\Rightarrow \frac{y\,dy}{y+c_1} = dx \Rightarrow y - c_1\ln(y+c_1) = x + c_2$$

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

امتحان مقرر المعادلات التفاضلية (1)

للفصل الدراسي الأول لطلاب السنة الثانية رياضيات

لعام 2014/2013 م.

الاسم :

المدة : ساعتان

الدرجة : (100)

السؤال الأول (40 درجة)

أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين :

1) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

2) $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ ، $y_1 = 1$

السؤال الثاني (30درجة) :

1) $(x^2 + x - y)dx + xdy = 0$

2) $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$ ، $y(1) = \frac{\pi}{2}$

3) $(x^3 + xy)y' = y^2 - x^4$

1) بين فيما إذا كانت المعادلة الأولى تامة أم لا ثم أوجد الحل العام لها .

2)جدْ الحلّ الخاص للمعادلة التفاضلية الثانية وفق الشرط المعطى .

3)أثبت أن المعادلة التفاضلية الثالثة متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية ثم أوجد الحل العام لها .

السؤال الثالث (30درجة) :

1) $x^2y'^3 - xy' + y = 0$

2) $y = xy' - e^{y'}$

3) $xy' + y' = 2x$

1)جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأولى وسيطياً .

2)جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثانية مع ذكر نوعها وحلها الشاذ .

3)جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثالثة .

حمص 2014/1/27م. مع تمنياتي بالنجاح و التوفيق_____ د.ميمون زين الدين

[illegible] السنة الثانية [illegible]

لعام ٢٠١٢ - ٢٠١٣

الحل

السؤال الثاني (20 درجة)

1) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

معادلة برنولي نقسم على x ثم على $\sqrt{y}$ نجد

$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$ (1)

نفرض $\sqrt{y} = z \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = z' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$ نعوض في (1) نجد

$2z' - \frac{4}{x}z = x \Rightarrow \boxed{z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}}$ (2)

معادلة خطية غير متجانسة

$z' - \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \boxed{z = cx^2}$ (3)

10

نشتق باعتبار c دالة بـ x نجد

$z' = c'x^2 + 2cx$

نعوض z, z' في (2) نجد

$c'x^2 + 2cx - 2cx = \frac{x}{2} \Rightarrow c' = \frac{1}{2x}$

بالمكاملة $\Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln x + c_1 \Rightarrow z = x^2(\frac{1}{2}\ln x + c_1) \Rightarrow \sqrt{y} = \dots$

$\Rightarrow \boxed{y = x^4(\frac{1}{2}\ln x + c_1)^2}$

2) $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ (1) ; $y_1 = 1$

معادلة ريكاتي نجري التحويل التالي:

$y = 1 + \frac{1}{z}$

$\Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$ بالتعويض $-\frac{z'}{z^2} - x(1+\frac{1}{z})^2 + (2x-1)(1+\frac{1}{z})$

$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - x(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}) + 2x + \frac{2x}{z} - 1 - \frac{1}{z} = x - 1$

$-z' - xz^2 - 2xz - x + 2xz^2 + 2xz - z^2 - z = xz^2 - z^2$

$\boxed{z' + z = -x}$ (2)

خطية غير متجانسة نحلها بطريقة عامل التكامل

$\mu = e^{\int dx} = e^x$

نضرب المعادلة (2) بـ μ

$d(e^x z) = -xe^x$ بالمكاملة

$e^x z = (1-x)e^x + c \Rightarrow z = 1 - x + ce^{-x}$

بالعودة للمتحولات القديمة

$\boxed{y = \frac{ce^{-x} - x + 2}{ce^{-x} - x + 1}}$

10

حل السؤال الأول (30)

1) $(x^2+x-y)\,dx + x\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \,,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = +1 \,,\; \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

والمعادلة ليست تامة لنوجد عامل التكميل

$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2}{x} \Rightarrow d\ln\mu = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\mu = -2\ln x$

$\Rightarrow \boxed{\mu = x^{-2}}$

10

نضرب كلا من طرفي المعادلة بـ μ

$(1+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2})\,dx + \frac{1}{x}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$

لنوجد الحل العام . $x_0=1, y_0=0$ بالقاعدة :

$F(x,y) = \int_1^x (1+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2})\,dx + \int_0^y dy = [x+\ln x+\frac{y}{x}]_1^x + y]_0^y =$

$= x+\ln x+\frac{y}{x} - 1 - \underset{0}{\ln 1} - \frac{y}{1} + y = x+\ln x+\frac{y}{x}-1$

$\Rightarrow \boxed{F = x+\ln x+\frac{y}{x} = C}$

2) $xy' = y + x\sin\frac{y}{x} \quad ; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$

نقسم على x فنحصل على معادلة متجانسة

$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

نفرض $\frac{y}{x} = z \Leftarrow y = xz \Leftarrow y' = z + xz'$ نعوض في المعادلة

$z + xz' = z + \sin z \Rightarrow xz' = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$

10

بالمكاملة نجد :

$\ln|\tan\frac{z}{2}| = \ln|x| + \ln c$

بالرفع للعدد النيبري نجد :

$\tan\frac{z}{2} = cx \Rightarrow z = 2\arctan cx$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = 2\arctan cx \Rightarrow \boxed{y = 2x\arctan cx}$ الحل العام

باستخدام الشرط المعطى نوجد الحل الخاص

$\frac{\pi}{2} = 2\arctan c \Rightarrow c = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

والحل الخاص :

$\boxed{y = 2x\arctan x}$

3) $(x^3+xy)y' = y^2 - x^4$

نبدل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ وكل y' بـ $\lambda^{n-1} y'$ نجد:

$\lambda^{n+2} x^3 y' + \lambda^{2n} x y y' = \lambda^{2n} y^2 - \lambda^4 x^4$

ولكي نجد قيمة n التي تجعل قوى λ في جميع الحدود متساوية:

$n+2 = 2n = 4 \Rightarrow n = 2$

المعادلة المعطاة متجانسة بالأبعاد من الدرجة الثانية ومنه نجري التحويل التالي:

نعوض: $y = x^2 u \Rightarrow y' = 2xu + x^2 u'$

$$x^3(2xu + x^2u') + x(x^2u)(2xu + x^2u') = (x^4u^2 - x^4$$

نفك الأقواس ونختصر على x^4:

$$2u + xu' + 2u^2 + xuu' = u^2 - 1$$

$$x(u+1)u' + 2u(u+1) = (u+1)(u-1)$$

$$xu' + 2u = u - 1 \Rightarrow xu' = -(1+u) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{1+u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+u) = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow (1+u) = \frac{c}{x} \Rightarrow u = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = cx - x^2}$$

(10)

جواب السؤال الثالث (30):

1) $x^2 y'^3 - xy' + y = 0$

المعادلة محلولة بالنسبة لـ y نفرض $y' = p$ نجد:

$$y = xp - x^2p^3$$

نشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} - 2xp^3 - 3x^2p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2p^3 = (1 - 3xp^2)\frac{dp}{dx}$$

نفرض أن p متحول مستقل و x دالة مجهولة نجد:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = \frac{1}{2p^3}$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة بحلها نحصل

$$x = -p^{-2} + cp^{-\frac{3}{2}}$$

والحل العام وسيطياً

$$\begin{cases} x = cp^{-\frac{3}{2}} - p^{-2} \\ y = cp^{-\frac{1}{2}} - p^{-1} - p^3(cp^{-\frac{3}{2}} - p^{-2})^2 \end{cases}$$

(15)

2) $y = xy' - e^{y'}$

معادلة كليرو نضع $y' = p$ نجد:

$y = xp - e^{p}$

بوضع $p = c$ نجد الحل العام:

$y = cx - e^{c}$

لإيجاد الحل الشاذ:

$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp - e^{p}dp$

$\Rightarrow x\,dp - e^{p}dp = 0 \Rightarrow (x - e^{p})dp = 0$

إما $dp = 0 \Rightarrow p = c$ وهكذا نجد الحل العام

أو $x = e^{p} \Rightarrow$ بالتعويض بالمعادلة $y = e^{p}p - e^{p}$ أي: $y = e^{p}(p-1)$

نحصل على الحل الشاذ وسيطياً $\begin{cases} x = e^{p} \\ y = e^{p}(p-1) \end{cases}$ والحل الشاذ ديكارتياً

نحذف p بينهما نجد $p = \ln x$ نعوض في y نجد

$y = x(\ln x - 1)$

3) $x y'' + y' = 2x$

بوضع $y' = p$ نجد:

$p' + \frac{1}{x}p = 2$

خطية غير متجانسة:

$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$ بالمكاملة

$\ln p = -\ln x + \ln c \Rightarrow p = cx^{-1} \Rightarrow p' = c'x^{-1} - cx^{-2}$

نعوض في المعادلة:

$c'x^{-1} - cx^{-2} + cx^{-2} = 2 \Rightarrow c' = 2x \Rightarrow c = x^2 + c_1$

$p = x + c_1 x^{-1} \Rightarrow y' = x + c_1 x^{-1} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_1 \ln x + c$